

Câu	Đáp án	Điểm
I - 1	<p>Với $z = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$, ta có $r = \sqrt{\frac{4}{3} + 4} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$</p> <p>Biểu diễn lượng giác của $z^4 = \frac{256}{9} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$</p>	0.75 0.25
I - 2	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(2x)(\sqrt{x+9} + 3)}$ $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(\sqrt{x+9} + 3)} = \frac{1}{12}$	0.5 0.5
II - 1	<p>Hàm số khả vi tại 0 $\Leftrightarrow f$ liên tục và có đạo hàm hữu hạn tại 0.</p> $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a-1)x + b = b, f(0) = b. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x = 0. \end{cases}$ <p>Hàm f liên tục tại 0 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow b = 0$.</p> <p>Hàm f có đạo hàm tại 0</p> $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(a-1)x - 0}{x - 0} = a - 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x - 0}{x - 0} = 1 \Leftrightarrow a = 2.$ <p>Vậy hàm khả vi tại 0 $\Leftrightarrow a = 2, b = 0$.</p>	0.5 0.5 1.0
II - 2	<p>Thể tích hộp: $V = \pi r^2 h = 300 \Rightarrow h = \frac{300}{\pi r^2}, (r > 0, h > 0)$</p> <p>Chi phí in nhãn hộp: $2\pi r h \times 1500 = \frac{600}{r} \times 1500 = \frac{900000}{r}$</p> <p>Chi phí làm vỏ hộp: $(2\pi r h + 2\pi r^2) \times 1000 = \frac{600000}{r} + 2000\pi r^2$</p> <p>Tổng chi phí: $C(r) = \frac{1500000}{r} + 2000\pi r^2$</p> <p>$C'(r) = \frac{-1500000}{r^2} + 4000\pi r = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}} \approx 4.9237$ (cm).</p>	0.25 0.5 0.25

	<p>Vậy cần thiết kế hộp với bán kính $r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}$, $h \approx 3.939$.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>r</td> <td>0</td> <td>$\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}$</td> <td>$\infty$</td> </tr> <tr> <td>$C'(r)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$C(r)$</td> <td>∞</td> <td>\rightarrow</td> <td>∞</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center; margin-left: 100px;">\rightarrow 456971,0839 \rightarrow</p>	r	0	$\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}$	∞	$C'(r)$	-	0	+	$C(r)$	∞	\rightarrow	∞	
r	0	$\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}$	∞											
$C'(r)$	-	0	+											
$C(r)$	∞	\rightarrow	∞											
III - 1	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx .$ <p>Đặt $u = \sin x, du = \cos x dx$, khi đó</p> $I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\sin t}^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2\sqrt{u} \Big _{\sin t}^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2 - 2\sqrt{\sin t}] = 2.$	0.25 0.25 0.5												
III - 2	$\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 1}} dx = \int_2^{+\infty} f(x) dx$ $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 1}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{x^6}} = \frac{1}{x} = g(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^6 - 1}} = 1.$ <p>Vì $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ phân kỳ ($\alpha = 1$), nên $\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 1}} dx$ phân kỳ theo t/c so sánh 2.</p>	0.5 0.5												
IV - 1	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k + k}{k^2 \cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ <p>Chuỗi - p: $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ hội tụ với $p = 2 > 1$ (hoặc hội tụ theo tiêu chuẩn tích phân).</p> <p>Chuỗi $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ hội tụ theo tiêu chuẩn tỉ số $\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k \cdot 3^k}{(k+1)3^{k+1}} = \frac{1}{3} < 1 \right)$.</p> <p>Vậy chuỗi đã cho hội tụ.</p>	0.25 0.25 0.25 0.25												
IV - 2	<p>Đặt $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, a_k = \frac{1}{2k+1}, X = x+2.$</p> $\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k+1}{2k+3} = 1 \Rightarrow \text{bán kính hội tụ } R = 1.$ <p>Chuỗi lũy thừa $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ hội tụ với mọi $X \in (-1, 1)$.</p> <p>Với $X = -1$: chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số đan dấu $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.</p>	0.25 0.25												

	<p>Với $X = 1$: chuỗi lũy thừa trở thành $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}$, chuỗi này phân kỳ theo tiêu chuẩn tích phân (hoặc tiêu chuẩn so sánh.)</p> <p>Vậy chuỗi $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ hội tụ $\forall X \in [-1, 1)$ suy ra miền hội tụ của $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^k}{2k+1}$ là $[-3, -1)$.</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p>
<p>IV - 3</p>	<p>$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} 2x dx \right] = 1 + \pi$</p> <p>$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \cos nxdx + \int_0^{\pi} 2x \cos nxdx \right]$</p> <p>$= \frac{\sin nx}{n\pi} \Big _{-\pi}^0 + \frac{2x}{\pi n} \sin nx \Big _0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big _0^{\pi} = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}$</p> <p>$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \sin nxdx + \int_0^{\pi} 2x \sin nxdx \right]$</p> <p>$= -\frac{\cos nx}{n\pi} \Big _{-\pi}^0 - \frac{2x}{\pi n} \cos nx \Big _0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big _0^{\pi} = \frac{(-1)^n [1 - 2\pi] - 1}{\pi n}$</p> <p>Vậy khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ là:</p> <p>$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$ với a_0, a_n, b_n xác định như trên.</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>

Hết